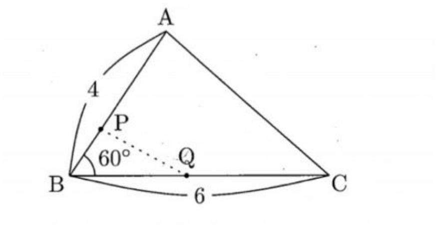
2020　北海道科学大学　一般選抜対策講座資料

＊解説動画と併せてご覧ください。

[1] 傾向と対策，共通テストとの関連

[2] 2020 一般前期　数学Ⅰ三角比

三角形 ABC において，AB=4,BC=6,$\angle$ABC=60° とする．辺 AB 上の点 P と，辺 BC 上の点 Q は，AP=BQ=$a\left(0<a<4\right)$を満たしている．以下の各問に答えよ．



(1) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(2) AC の長さを求めよ．

(3) 三角形 PBQ の面積を a を用いて表せ．

(4) 三角形 PBQ の面積が三角形 ABC の面積の $\dfrac{1}{6}$ になるような a の値を求めよ．

(5) PQ^2 を a を用いて表せ．

(6) PQ^2 が最も小さくなるような a の値を求めよ．

[3] 2020 一般前期　数学Ⅱ図形と方程式

円 $x^2+y^2=25$ と点$\left(-4,3\right)$で接する直線 $y=mx+n$ について，$m=$[オ]，$n=$[カ]である．

＊以下は自習用問題です。ぜひ自力で解答してみてください。

[4] 自習用問題（複数の方針を研究）

同一円周上に，異なる 4 点 A,B,C,D がこの順に反時計回りに並んでいる．AB=3,BC=CD,DA=1, $\angle$DAB=120°を満たしている．

(1)BD の長さを求めよ．

(2)AC の長さを求めよ．

(3)AE の長さを求めよ．

(4)$\sin\angle\mathrm{AED}$ を求めよ．

図を描いてしっかり考えてみましょう．

解）

(1) △ABD に余弦定理を用いると

$$\mathrm{BD}^2=3^2+1^2-2\cdot3\cdot1\cos120^\circ=10-2\cdot3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=13 \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{BD}=\sqrt{13}$$

を得る．

(2) 四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle\mathrm{BCD}=180^\circ-120^\circ=60^\circ$$

であり，$\mathrm{BC=CD,BD}=\sqrt{13}$ とあわせて，△BCD は一辺の長さ $\sqrt{13}$ の正三角形である．

いま，$\angle\mathrm{ABC}=\theta$ とすると，四角形 ABCD は円に内接するから $\angle\mathrm{CDA}=180^\circ-\theta$ となる．

△ABC に余弦定理を用いると

$$\mathrm{AC}^2=3^2+\left(\sqrt{13}\right)^2-2\cdot3\cdot\sqrt{13}\cos\theta$$

であり，△CDA に余弦定理を用いると

$$\mathrm{AC}^2=\left(\sqrt{13}\right)^2+1^2-2\cdot\sqrt{13}\cdot1\cdot\cos\left(180^\circ-\theta\right)$$

である．

$\cos\left(180^\circ-\theta\right)=-\cos\theta$ に注意すると

$$3^2+\left(\sqrt{13}\right)^2-2\cdot3\cdot\sqrt{13}\cos\theta=\left(\sqrt{13}\right)^2+1^2+2\cdot\sqrt{13}\cdot1\cdot\cos\theta$$

となるから　$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$　を得る．

これを用いると

$$\mathrm{AC}^2=3^2+\left(\sqrt{13}\right)^2-2\cdot3\cdot\sqrt{13}\cos\theta=16 \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{AC}=4$$

である．

注）トレミーの定理（円に内接する四角形 ABCD において $AB\times CD+BC\times DA=AC\times BD$ が成り立つ）を用いて　$3\times\sqrt{13}+\sqrt{13}\times 1=AC\times\sqrt{13}$　から AC=4 を求めることも出来る．

(3) （**方針 1**）三角形の相似

解 1）△ABE∽△DCE より

$$AB:DC=AE:DE \quad \text{すなわち} \quad 3:\sqrt{13}=AE:DE \quad \cdots ①$$

である．また，△ADE∽BCE より

$$AD:BC=DE:CE \quad \text{すなわち} \quad 1:\sqrt{13}=DE:CE \quad \cdots ②$$

である．

①，②より

$$\sqrt{13}AE=3DE, \sqrt{13}DE=CE$$

ゆえ

$$\sqrt{13}AE=3\times\frac{CE}{\sqrt{13}} \quad \text{すなわち} 13AE=3CE$$

であり　AE:CE=3:13　となる．

よって

$$AE=AC\times\frac{3}{3+13}=4\cdot\frac{3}{16}=\frac{3}{4}$$

を得る．

（**方針 2**）

四角形 ABCD が円に内接するか否かは問わない．

四角形 ABCD において 2 直線 AC，BD の交点を E とする．(各自図を描きましょう．)

① AE : CE=△ABD : △BCD

証）A，C から直線 BD に下ろした垂線の足をそれぞれ F，G とする．このとき，

$$\triangle ABD : \triangle BCD=\left(\frac{1}{2}\cdot BD\cdot AF\right):\left(\frac{1}{2}\cdot BD\cdot CG\right)=AF:CG=AE:CE$$

② 四角形 ABCD の面積は $\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot\sin\angle AED$

解 2）

$$AE:CE=\triangle ABD:\triangle BCD=\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1\cdot\sin 120^\circ\right):\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}\cdot\sin 60^\circ\right)=3:13$$

である．

（以下，解 1 と同じ）

(4) （**方針 1**）角度，長さをかき込み正弦定理

解 1）円周角の定理より $\angle$CAB=$\angle$CDB=60°であるから，AE は$\angle$DAB の二等分線である．

よって EB:ED=AB:AD=3:1となるから

$$\mathrm{ED}=\mathrm{BD}\times\frac{1}{3+1}=\sqrt{13}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{13}}{4}$$

を得る．

△AED に正弦定理を用いると

$$\frac{\mathrm{ED}}{\sin\angle\mathrm{DAE}}=\frac{\mathrm{DA}}{\sin\angle\mathrm{AED}}\quad すなわち\quad \frac{\sqrt{13}}{4\sin 60^\circ}=\frac{1}{\sin\angle\mathrm{AED}}$$

であり，$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ にも注意すると

$$\sin\angle\mathrm{AED}=\frac{2\sqrt{39}}{13}$$

となる．

（**方針 2**） (3) 方針 2 のポイント②を用いる

解 2）四角形 ABCD の面積に着目して

$$\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{13}\sin\angle\mathrm{AED}$$

すなわち

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1\cdot\sin 120^\circ+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{13}\sin\angle\mathrm{AED}$$

より

$$\sin\angle\mathrm{AED}=\frac{2\sqrt{39}}{13}$$

を得る．

[5] 自習用問題（複数の方針を研究）

$$a_1=0, a_2=1$$
$$a_{2n+1}-a_{2n-1}=n^2\ (n=1,2,3,\cdots)$$

のとき，a_{31} = [アイウエ]である．

（**方針 1**）

$$b_{n+1}-b_n=f(n)$$
$$\Rightarrow b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)\ (n\geqq 2)$$

解 1） $a_{2n-1}=b_n$ とすると

$$b_{n+1}=a_{2(n+1)-1}=a_{2n+1}$$

$$b_1=a_{2\cdot 1-1}=0$$

であるから，与漸化式は

$$b_1=0, b_{n+1}-b_{n-1}=n^2$$

となる．よって， $n \geqq 2$ では

$$b_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$

であるから，

$$a_{31}=a_{2\cdot 16-1}=b_{16}=0+\sum_{k=1}^{15}k^2=\frac{1}{6}\cdot 5\cdot 16\cdot 31=1240$$

を得る．

（**方針 2**） 方法 1 が思いつかなくても

解 2）与漸化式において

$n=1$ とすると $a_3-a_1=1^2$

$n=2$ とすると $a_5-a_3=2^2$

$n=3$ とすると $a_7-a_5=2^2$

$\vdots \qquad \vdots$

$n=15$ とすると $a_{31}-a_{29}=15^2$

これらを加えると

$$a_{31}-a_1=1^2+2^2\cdots+15^2$$

（以下，解 1 と同じ）